5.9 A Função Exponencial Natural

Da forma que a função logarítmica foi construída, ela possui uma função inversa, a ser chamada de Função Exponencial Natural, como apresentada a seguir.

Definição 5.9.1 *A Função Exponencial Natural é a inversa da função logarítmica natural. Assim, ela é definida por*

$$\exp(x) = y \Leftrightarrow x = \ln(y).$$

Algumas características da função exponencial são obtidas diretamente da sua inversa. Como a função logarítmica é crescente, segue que a sua inversa também é. Além disso, como

$$\begin{array}{rccc} \ln : & \mathbb{R}_+^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & a & \mapsto & \ln(a) \end{array} \tag{5.7}$$

segue que

$$\begin{array}{rccc} \exp : & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ & a & \mapsto & \exp(a) \end{array}. \tag{5.8}$$

Consequentemente, $\ln(exp(x)) = x$ e $\exp(\ln(y)) = y$.

Definição 5.9.2 *Seja a um número real positivo qualquer, então*

$$a^x = \exp(x\ln(a)), \ \forall\ x.$$

Teorema 5.9.1 *Se a é um número real qualquer, então*

$$\ln(a^x) = x\ln(a).$$

Demonstração: Tem-se que $a^x = \exp(x\ln(a))$, $\forall\ x$. Então, $\ln(a^x) = \ln(\exp(x\ln(a))) = x\ln(a)$. □

Definição 5.9.3 *O número e (Número de Euler) é definido pela fórmula*

$$e = \exp(1).$$

Teorema 5.9.2 *1.* $\ln(e) = 1$;

2. $\exp(0) = 1$;

3. Para todos os valores de x, $e^x = \exp(x)$;

4. Se a e b são dois números reais quaisquer, então $e^a \times e^b = e^{a+b}$;

5. Se a e b são dois números reais quaisquer, então $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$;

6. Se a e b são dois números reais quaisquer, então $(e^a)^b = e^{ab}$.

Demonstração: Exercícios. □

Um dos principais resultados envolvendo a exponencial está relacionada com a sua derivada, como apresentado a seguir.

Teorema 5.9.3 $D_x(e^x) = e^x$.

Demonstração: Seja $y = e^x$. Então, pela definição de exponencial, segue que $x = \ln(y)$. Derivando implicitamente a equação em função de x, segue que:

$$D_x(x) = D_X(\ln(y)) \Rightarrow 1 = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y \Rightarrow D_x(e^x) = e^x.$$

□

O resultado anterior garante que a derivada da função exponencial é a própria função, sendo essa a única com essa propriedade. Generalizando,

Teorema 5.9.4 *Se u é uma função de x diferenciável, então*

$$D_X(e^u) = e^u D_x(u).$$

Demonstração: Aplique a regra da cadeia e o teorema anterior. □

Vamos a alguns exemplos.

Exemplo 5.9.1 *Encontre cada uma das derivadas a seguir.*

1. $f(x) = e^{2x}$;
2. $f(x) = x^2 e^x$;
3. $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$;
4. $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$;
5. $f(x) = e^{2x+\ln(x)}$.

Solução:

1. Tem-se que
$$f'(x) = (e^{2x})' = e^{2x} \times D_x(2x) = 2e^{2x}.$$
2. Tem-se pela regra da derivada do produto que
$$f'(x) = (x^2)' \times e^x + x^2 \times (e^x)' = 2xe^x + x^2e^x = (x+2)xe^x.$$
3. Tem-se que
$$f'(x) = (e^{\sqrt{x^2+1}})' = e^{\sqrt{x^2+1}} \times D_x(\sqrt{x^2+1}) = e^x \left(\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \times D_x(x^2+1)\right) =$$
$$= e^x \left(\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \times (2x)\right) = \frac{xe^x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

4. Tem-se que

$$f'(x) = (e^{\frac{1}{x^2}})' = e^{\frac{1}{x^2}} \times \left(\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{-2e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3}.$$

5. Tem-se que

$$f'(x) = (e^{2x+\ln(x)})' = e^{2x+\ln(x)} \times D_x(2x + \ln(x)) = e^{2x+\ln(x)} \left(2 + \frac{1}{x}\right).$$

□

Teorema 5.9.5 *Sendo k uma constante, tem-se que*

$$\int e^u du = e^u + k.$$

Demonstração: Como e^u é uma primitiva para si mesma, segue o resultado. □

Exemplo 5.9.2 *Calcule cada uma das integrais a seguir.*

1. $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$;

2. $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{3/x}}{x^2} dx$.

Solução:

1. Considere $u = \sqrt{x}$. Assim, $du = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} dx$. Assim,

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{e^u}{2} du = 2 \int e^u du = 2e^u + k = 2e^{\sqrt{x}} + k.$$

2. Considere $u = \dfrac{3}{x}$. Então, $du = \dfrac{-3}{x^2} dx \Rightarrow \dfrac{du}{-3} = \dfrac{dx}{x^2}$. Como $1 \leq x \leq 2$, invertendo a desigualdade segue que $\dfrac{1}{1} \geq \dfrac{1}{x} \geq \dfrac{1}{2}$ e, consequentemente, $\dfrac{3}{2} \leq u \leq 3$. Assim,

$$\int_1^2 \frac{e^{3/x}}{x^2} dx = \int_1^2 e^{3/x} \frac{dx}{x^2} = \int_{3/2}^3 e^u \frac{du}{-3} = \frac{-1}{3} \int_{3/2}^3 e^u du = \frac{-1}{3} \left. e^u \right|_{3/2}^3 =$$

$$= \frac{-1}{3} \left(e^3 - e^{3/2}\right).$$

□

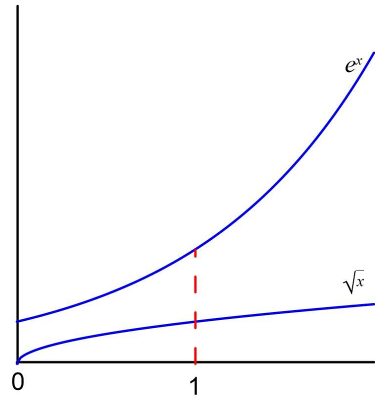

Figura 5.14: Região entre as curvas $y = e^x$, $y = \sqrt{x}$, $x = 0$ e $x = 1$..

Exemplo 5.9.3 *Encontre o valor da área da região limitada pelas curvas* $y = e^x$, $y = \sqrt{x}$ *e as retas* $x = 0$ *e* $x = 1$.

Solução: A região pode ser observada na Figura 5.14. Como $e^x > \sqrt{x}$, para todo x, segue que a área da região ficada dada por

$$A = \int_0^1 (e^x - \sqrt{x})dx = \left(e^x - \frac{x^{3/2}}{3/2}\right)\Big|_0^1 = \left(e - \frac{2}{3}\right) - 1 = e - \frac{5}{3}\ u.a..$$

□

Sobre o gráfico da função exponencial, sabe-se que a função só assume valores positivos e como $D_x^(n)(e^x) = e^x$, seque que $D_{xx}(e^x) = D_x(e^x) = e^x > 0$, para todo x. Assim, a função exponencial é crescente e tem concavidade voltada para cima. Assim, um esboço do gráfico da função exponencial pode ser vista na Figura 5.15.

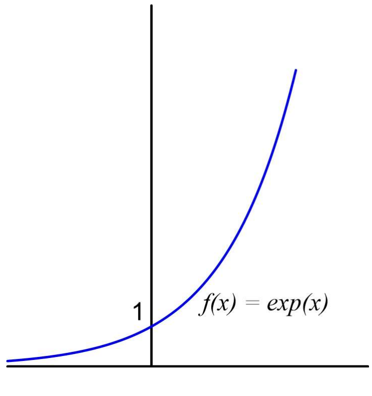

Figura 5.15: Exboço do gráfico da função $f(x) = e^x$.

Da 5.9.2 é possível estabelecer a seguinte definição.

Definição 5.9.4 *Se a é um número positivo qualquer, então a função exponencial de base a fica definida por*

$$f(x) = a^x = \exp(x \ln(a)).$$

Segue dessa definição que todas as propriedades válidas para a exponencial também são válidas para a exponencial de base a. Por exemplo,

$$a^x \times a^y = \exp(x\ln(a)) \times \exp(y\ln(a)) = \exp(x\ln(a) + y\ln(a)) =$$

$$= \exp((x+y)\ln(a)) = a^{x+y}.$$

Veja outros resultados.

Teorema 5.9.6 *Se a é um número positivo qualquer, então*

$$D_x(a^x) = a^x \ln(a).$$

Demonstração: Como $a^x = \exp(x\ln(a))$, segue que

$$D_x(a^x) = D_x(\exp(x\ln(a))) = \exp(x\ln(a)) \times D_{x\ln(a)} =$$

$$= \exp(x\ln(a))\ln(a) = a^x\ln(a).$$

□

Teorema 5.9.7 *Se a é um número positivo diferente de 1, então*

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln(a)} + c.$$

Demonstração: Exercício. □

Exemplo 5.9.4 *Encontre o valor da área da região, no primeiro quadrante, delimitada pelas curvas $y = 2^x$, $y = 2^{-x}$ e a reta $x = 2$.*

Solução: Um esboço do gráfico das curvas pode ser visto na Figura .

Assim, como a curva dada por $y = 2^x$ é maior do que a curva dada por $y = 2^{-x}$, segue que o valor da área fica dado por

$$A = \int_0^2 (2^x - 2^{-x})dx = \left(\frac{2^x}{\ln(2)} - \frac{-2^{-x}}{\ln(2)}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{(2^2 + 2^{-2}) - (2^0 + 2^{-0})}{\ln(2)} =$$

$$= \frac{2 + \frac{1}{4}}{\ln(2)} = \frac{9}{4\ln(2)} \ u.a..$$

□

Por fim, é possível estabelecer a função logarítmica de base qualquer.

Definição 5.9.5 *Se a é um número real positivo, diferente de 1, então a função Logarítmica de Base a, denotada por $\log_a x$, é a inversa da função exponencial de base a, ou seja,*

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x.$$

As propriedades do logaritmo de base a são as mesmas do logaritmo natural, além disso, aqui aparece a mudança de base.

Teorema 5.9.8
$$\log_a x = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

Demonstração: Como $a^y = x \Leftrightarrow \ln(a^y) = \ln(x) \Leftrightarrow y\ln(a) = \ln(x) \Leftrightarrow y = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ e $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$, então

$$\log_a x = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

$\square$

Corolário 5.9.1
$$\log_a e = \frac{1}{\ln(a)}.$$

Teorema 5.9.9 *Se a é um número real positivo diferente de 1, então*

$$D_x(log_a x) = \frac{1}{x\ln(a)}.$$

Demonstração: Como $\log_a x = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$, segue que

$$D_x(\log_a x) = D_x\left(\frac{\ln(x)}{\ln(a)}\right) = \frac{1}{\ln(a)} \times D_x(\ln(x)) = \frac{1}{\ln(a)} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln(a)}.$$

$\square$

Exemplo 5.9.5 *Calcule a derivada da função $f(x) = \log_{10} \frac{x+1}{x^2+1}$.*

Solução: Tem-se que

$$f(x) = \log_{10} \frac{x+1}{x^2+1} = \log_{10}(x+1) - \log_{10}(x^2+1).$$

Assim,

$$f'(x) = (\log_{10}(x+1) - \log_{10}(x^2+1))' = \frac{1}{(x+1)\ln(10)}(x+1)' - \frac{1}{(x^2+1)\ln(10)}(x^2+1)' =$$

$$= \frac{1}{\ln(10)}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{2x}{x^2+1}\right).$$

$\square$

Exemplo 5.9.6 *Sendo $x > 0$ e $x \neq 1$, calcule a derivada da função $f(x) = x^x$.*

Solução: Como $y = x^x$, segue que $\ln(y) = \ln(x^x) = x\ln(x)$. Assim,

$$(\ln(y))' = (x\ln(x))' \Leftrightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln(x) + x\frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = y\,(1 + \ln(x))$$
$$\Leftrightarrow y' = x^x(1 + \ln(x)).$$

$\square$

Para finalizar......

Teorema 5.9.10 *Se a é um número real positivo diferente de 1, segue que*

$$\int \log_a x dx = \frac{x(ln(x) - 1)}{\ln(a)} + k.$$

Demonstração: A demonstração desse resultado ainda não pode ser obtida, pois é necessário integração por partes que ainda não foi estudado. $\square$

5.10 Exercícios

Exercício 5.10.1 *Encontre a derivada de cada uma das funções a seguir.*

(a) $y = e^{5x});$ **(b)** $y = e^{x^2-3};$ **(c)** $y = e^x sen(e^x);$ **(d)** $y = e^{e^x};$

(e) $y = x^5 e^{-3\ln(x)};$ **(f)** $y = \dfrac{2}{e^x + e^x};$ **(g)** $y = \ln\left(\dfrac{e^{4x} - 1}{e^{4x} + 1}\right).$

(h) $y = e^{-3x^2};$ **(i)** $y = e^{\cos x};$ **(j)** $y = tg(e^{\sqrt{x}});$

(k) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}};$ **(l)** $y = x^5 e^{5\ln(2x)}.$

Exercício 5.10.2 *Calcule as integrais indefinidas:*

(a) $\displaystyle\int e^{2-5x}dx;$ **(b)** $\displaystyle\int \frac{1 + e^{2x}}{e^x}dx;$ **(c)** $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{(1 - 2e^{3x})^2}dx.$

Exercício 5.10.3 *Calcule as integrais definidas:*

(a) $\displaystyle\int_3^5 \frac{2x}{x^2 - 5}dx;$ **(b)** $\displaystyle\int_1^3 \frac{2x + 3}{x + 1}dx;$ **(c)** $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{x\ln^2 x};$ **(d)** $\displaystyle\int_0^1 e^2 dx;$

(e) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dx}{x}dx;$ **(f)** $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx;$ **(g)** $\displaystyle\int_0^2 xe^{4-x^2}dx$

(h) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln^2 x};$ **(i)** $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x}{e^x + e}dx.$

Exercício 5.10.4 *Determine o valor da área da região definida pelas curvas $y = e^{-x^2}$, $y = 0$, $x = 0$ e $x = 1$.*